数理解析研究所講究録
638巻 1988年 203-223

On Propagation of regular Singularities for nonlinear partial differential Equations.

明治学院大・経済学部　石井 坦
(TAN ISHII)

§1. Necessary conditions

Ωを$\mathbb{C}^n$の原点を含む領域とし，$z=(z_1,\dots,z_n)$をその点とする。$\mathcal{O}(\Omega)$，$\mathcal{O}_0(\Omega)$，$\mathcal{O}_1(\Omega)$はそれぞれΩ上正則な関数の全体，$\{\phi\in\mathcal{O}(\Omega);\ \phi(0)=0,\ \partial\phi(0)\neq 0\}$，$\{v\in\mathcal{O}(\Omega);\ v(0)\neq 0\}$を表すものとする。我々は，多項式型の非線型偏微分作用素 $P[u]=P(z,u,\dots,\partial^\alpha u,\dots)$ を考える。$\prod_\alpha(\partial^\alpha u)^{\mu_\alpha}$を$((\partial^\alpha u))^\mu$と表すことにする，但し，$\mu=(\mu_\alpha)_\alpha$はmulti-index $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$を添字とするmulti-indexである。我々は$P[u]$に対して，$|\alpha|\le m$であり，かつ，有限個のμを用いて，$a_\mu(z)\in\mathcal{O}(\Omega)$を係数として

$$(1\text{-}1)\qquad P[u]=\sum_\mu a_\mu(z)\,((\partial^\alpha u))^\mu$$

と表されるものと仮定する。$a_\mu(z)\neq 0$なるμの全体を$\mathcal{L}$と置き，$\max_{\mu\in\mathcal{L}}|\mu|\geq 2$と仮定する。$\mu=(\mu_\alpha)\in\mathcal{L}$に対し

$$(1\text{-}2)\qquad g_\mu(\sigma)\equiv|\mu|\sigma-\sum_\alpha\mu_\alpha\cdot|\alpha|\quad,\ \sigma\in\mathbb{C}$$

と置く。集合$\mathcal{L}$は，関数$g_\mu(\sigma)$が同じものになるμの集合に類別される。$A\subset\mathcal{L}$がその一つの類であるとき，共通の関数

を $y_A(\sigma)$ と記し，また，共通な $|\mu|$ の値を $|A|$ とも記す。 principal class；我々は $\mathcal{C}_+ \equiv \{\omega = e^{i\theta};\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ と置く。$\tau \in \mathbb{C}$，$\omega \in \mathcal{C}_+$ とする。$\mathcal{L}$ の一つの類 π について，$\forall \nu \in \mathcal{L} \setminus \pi$ に対し

$$(1\text{-}3) \qquad \mathcal{R}e\,(\omega\, y_\pi(\tau)) < \mathcal{R}e\,(\omega\, y_\nu(\tau))$$

が成り立つとき，π を (τ, ω) に対する principal class と呼ぶ。 characteristic exponent；$t \in \mathbb{R}$ に対し $\eta(t) \equiv \min_{\mu \in \mathcal{L}} y_\mu(t)$ と置く。このとき $\eta(t)$ のグラフは concave な折れ線を描く。その折線の頂点に対応する t の値を $\sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_{Q-1}$ と置き operator P の characteristic exponent と呼ぶ。また，σ_r が char. exp. のとき，$\mathcal{L}$ の部分集合 $\pi_{\sigma_r} \equiv \{\mu \in \mathcal{L};\ y_\mu(\sigma_r) = \eta(\sigma_r)\}$ を，char. exp. σ_r に対する principal class と呼ぶ。 characteristic polynormial；$z \in \mathbb{C}$，$k \in \mathbb{Z}_+$ に対し，$[z:0] \equiv 1$，$[z:k] \equiv \prod_{i=0}^{k-1}(z-i)$ for $k \geq 1$，と置く。

Def. 1. (1) $\pi \subset \mathcal{L}$ はある $(\tau, \omega) \in \mathbb{C} \times \mathcal{C}_+$ に対する principal class とする。このとき，(τ, ω) に対する operator P の characteristic polynormial $p_\pi(z, \sigma, \xi)$ を，$\sigma \in \mathbb{C}$ と $\xi \in \mathbb{C}^n$ の多項式

$$(1\text{-}4) \qquad p_\pi(z, \sigma, \xi) \equiv \sum_{\mu \in \pi} a_\mu(z)\,(([\sigma : |\alpha|]\,\xi^\alpha))^\mu$$

により定める。 (2) char. exp. σ_r，$0 \leq r \leq Q-1$，に対する characteristic polynormial $p_{\sigma_r}(z, \xi, \chi)$ を $\xi \in \mathbb{C}^n$ と $\chi \in \mathbb{C}$ の多項式

$$(1\text{-}5) \qquad p_{\sigma_r}(z, \xi, \chi) \equiv \sum_{\mu \in \pi_{\sigma_r}} a_\mu(z)\,(([\sigma_r : |\alpha|]\,\xi^\alpha))^\mu\, \chi^{|\mu|}$$

により定める。

<u>spiral convergence</u> ; S と $\phi(z)\in\mathcal{O}_0(\Omega)$ により

(1-6) $\quad S=\{\phi(z)=0\}$

と表される正則な原点を通る超曲面とする。$\omega\in\mathbb{C}_+$ とし，

(1-7) $\quad \psi(z)=(\phi(z))^{1/\omega}$

により $\psi\in\mathcal{O}(\mathcal{R}(\Omega\setminus S))$ を定める。$z'\in S$ に対し，$\mathcal{R}(\Omega\setminus S)$ に含まれる点列 $\{z_i\}$ が，$|z-z'|\to 0$ かつ $|\arg\psi(z)|<K$ for $^\exists K>0$，をみたすとき，我々は $\{z_i\}$ は z' に<u>指数 ω の spiral convergent</u> をする，と言い，$\underline{z \underset{(\omega,K)}{\longrightarrow} z'}$ と表す。

さて，我々は非線型偏微分方程式

(1-8) $\quad P[u]=0$

の解 $u=u(z)$ で，(1-6)をみたす S と $0\not\equiv{}^\exists\sigma(z)\in\mathcal{O}(\Omega)$ 及び $^\exists\omega\in\mathbb{C}_+$ に対し次の条件をみたすものを考察する。

<u>Condition (Σ)</u> $\quad u(z)$ は次のように表される。$\phi(z)\in\mathcal{O}_0(\Omega)$ に対し

(1-9) $\quad u(z)=(\phi(z))^{\sigma(z)}\left(F_0(z)+F_1(z)\right)$,

但し $\underset{\not\equiv 0}{\sigma(z)}\in\mathcal{O}(\Omega)$, $F_0(z)\in\mathcal{O}_1(\Omega)$ さらに $F_1(z)$ は次の条件をみたす；$F_1(z)$は，(1-7)により定められた $\psi_\omega(z)$ と $^\exists K>0$, $^\exists\delta>0$ に対し $\mathcal{R}(\Omega\setminus S)$ 内の領域 $\Delta=\{|\arg\psi|<K\}\cap\{|\psi|<\delta\}\cap\mathcal{R}(\Omega\setminus S)$ に於て正則，かつ，$^\forall z'\in S$ に対し

(1-10) $\quad \Delta\ni z \underset{(\omega,K)}{\longrightarrow} z' \Rightarrow F_1(z)\to 0$

をみたす。

このとき我々は次の定理を得る。

Th. 1-1 非線型偏微分方程式 (1-8) が，(1-6) をみたす $S=\{\phi(z)=0\}$ と適当な $\sigma(z)\in\mathcal{O}(\Omega)$ 及び適当な $\omega\in\mathcal{C}_+$ に対し，condition (Σ) をみたす解 (1-9) を持つとする。

(1) もし $\pi\subset\mathcal{L}$ が，$(\sigma(0),\omega)$ に対する principal class ならば，σ と ϕ は S 上で方程式

(1-11) $\quad p_\pi(z',\sigma(z'),\partial\phi(z'))=0 \quad , \quad z'\in S$

をみたさねばならない。

(2) $\sigma\equiv\sigma_r$，$0\leqq{}^\exists r\leqq Q-1$，即ち characteristic exponent ならば，ϕ と F_0 は S 上で方程式

(1-12) $\quad p_{\sigma_r}(z',\partial\phi(z'),F_0(z'))=0$

をみたさねばならない。

§2. Existence of solutions with given regular singularities

I — 準備 この節以後，我々は $0\not\equiv\sigma(z)\in\mathcal{O}(\Omega)$ ，$\omega\in\mathcal{C}_+$ 及び $\pi\subset\mathcal{L}$ を，次の仮定をみたすように任意に選んで固定する。

Ass. 2-1. (1) π は (a) $(\sigma(0),\omega)$ に対する principal class であるか，または，(b) $\sigma\equiv\sigma_r$，$0\leqq{}^\exists r\leqq Q-1$ であって $\pi\equiv\pi_{\sigma_r}$ である。 (2) $\exists\,\mu=(\mu_\alpha)\in\pi$ s.t. $\max_{\mu_\alpha\neq 0}|\alpha|=m$

vector $\mathfrak{A}(z)$, $\tilde{\mathfrak{A}}(z)$; 我々は $\mathcal{O}(\Omega)$ の元の集合 $\{y_\mu(\sigma(z))-y_\pi(\sigma(z))\ ;\ \mu\in\mathcal{L}-\pi\}\cup\{1\}$ を整数差を法として類別する。

その類の個数を M としよう。各類から代表元として，$z=0$ に於ける値の実部が最も小さい元を選び，それらの代表元を任意に並べて $d_0 \equiv 1$, $d_1(z), \cdots, d_{M-1}(z)$ と置く。我々は $\boldsymbol{d}(z) \equiv (d_0, d_1(z), \cdots, d_{M-1}(z))$ と置く。$\mathbb{C}^M$ の基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_i = (0, \cdots, \overset{i+1}{\check{1}}, \cdots, 0)$, $i = 0, 1, \cdots, M-1$, と置く。任意の $\mu \in \mathcal{L} \setminus \pi$ に対し，適当な $0 \leq i_\mu \leq M-1$ 及び適当な $s_\mu \in \mathbb{Z}_+$ が存在して

(2-1) $\quad y_\mu(\sigma(z)) - y_\pi(\sigma(z)) = d_{i_\mu}(z) + s_\mu$

と表されるが，このとき我々は $\boldsymbol{l}_\mu \equiv \boldsymbol{e}_{i_\mu} + s_\mu \boldsymbol{e}_0$ と置く。次に，vector $\tilde{\boldsymbol{d}}(z) = (\tilde{d}_0, \tilde{d}_1(z), \cdots, \tilde{d}_{M-1}(z))$ を $\boldsymbol{d}(z)$ から $\tilde{d}_0 \equiv 1$, $\tilde{d}_i(z) = d_i(z) - 1$, $1 \leq i \leq M-1$, により定める。我々は集合 $\pi_1 \subset \mathcal{L}$ を $\pi_1 = \{\mu \in \mathcal{L} ; y_\mu(\sigma(z)) - y_\pi(\sigma(z)) \equiv 1\}$ により定める。

さて，我々は方程式 (1-8) の *given regular singularities* を持つ解を見出したいわけであるが，その際次の三つの cases に分類して考察する。

Case I　π は $(\sigma(0), \omega)$ に対する *principal class* であり，適当な整数 i, $0 \leq i \leq m$, が存在し，適当な $\mu = (\mu_\alpha)$, $\mu' = (\mu'_\alpha) \in \pi$ に対し次の不等式が成り立つ。

(2-2) $\quad \sum_{|\alpha|=i} \mu_\alpha \neq \sum_{|\alpha|=i} \mu'_\alpha$

Case II　$\sigma(z) \equiv \sigma$; const. で，π は (σ, ω) に対する

principal class, かつ (1) vector $\tilde{d}$ に対し、

(2-3) $\mathrm{Re}(\omega \tilde{d}_j) > 0$ for $j = 1, \cdots, M-1$.

(2) 任意の $\mu = (\mu_\alpha)$, $\mu' = (\mu'_\alpha) \in \pi$ と任意の $0 \le i \le m$ に対し、次の等式が成り立つ。

(2-4) $\underline{\sum_{|\alpha|=i} \mu_\alpha} = \underline{\sum_{|\alpha|=i} \mu'_\alpha}$ 我々はこの値を $\underline{M_i}$ と置く。

Case III $\sigma(z) \equiv \sigma_r$ for $0 \le {}^{\exists}r \le Q-1$, かつ $\pi = \pi_{\sigma_r}$

我々は、それぞれの場合に operator, $\sigma(z)$, $S = \{\phi(z) = 0\}$ に対するいくつかの仮定の下で、S 上に regular singularities を持つ解を次の形に構成する。

(2-5) $$u(z) = (\phi(z))^{\sigma(z)} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^M} \sum_{l=0}^{|k|} u_{k,l}(z)\, (\phi(z))^{d(z)\cdot k} (\log \phi(z))^{l^*}$$; case I.

(2-6) $$u(z) = (\phi)^{\sigma} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^M} \sum_{l=0}^{|k|} u_{k,l}\, (\phi)^{\tilde{d}\cdot k} (\log \phi)^{l^*}$$; case II

(2-7) $$u(z) = (\phi)^{\sigma_r} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^M} \sum_{l=0}^{|k|} u_{k,l}\, (\phi)^{d\cdot k} (\log \phi)^{l^*}$$; case III,

但し、$u_{k,l}(z) \in \mathcal{O}(\Omega')$ for $0 \in {}^{\exists}\Omega' \subset \Omega$, $u_{0,0}(0) \neq 0$ また $l^* = |k| - l$。

§3. Existence of solutions with given regular singularities II — Main result Case I;

Def 3-1. π は、ある $(\tau, \omega) \in \mathbb{C} \times \mathcal{C}_+$ に対する principal class とする。このとき、operator P の class π に対する denominator polynomial $\Delta_\pi(z, \sigma, \lambda, \xi)$ 及び denominator polynormial at $\lambda=\infty$ $s_{\pi,\infty}(z,\sigma,\xi)$ を，それぞれ $\sigma,\lambda\in\mathbb{C}$，$\xi\in\mathbb{C}^n$，及び σ,ξ の多項式

(3-1) $$s_\pi(z,\sigma,\lambda,\xi)\equiv\sum_{\mu\in\pi}a_\mu(z)\Big(\sum_\alpha\mu_\alpha\frac{[\sigma+\lambda:|\alpha|]}{[\sigma:|\alpha|]}\Big)(([\sigma:|\alpha|]\xi^\alpha))^\mu$$

(3-2) $$s_{\pi,\infty}(z,\sigma,\xi)\equiv\sum_{\mu\in\pi}\frac{1}{[\sigma:m]}a_\mu(z)\Big(\sum_{|\alpha|=m}\mu_\alpha\Big)(([\sigma:|\alpha|]\xi^\alpha))^\mu$$

により定義する。

さて，我々は case I の仮定の下で，(1-6) をみたす曲面 $S=\{\phi(z)=0\}$ に対し次の条件を付ける。

Ass. 3-1. (1) $\phi(z)$ は characteristic equation

(3-3) $$p_\pi(z,\sigma(z),\partial\phi(z))=0$$

をみたす。(2) λ の方程式

(3-4) $$s_\pi(0,\sigma(0),\lambda,\partial\phi(0))=0$$

は，$\lambda=d(0)\cdot\mathbb{k}$，$\mathbb{k}\in\mathbb{Z}_+^M\setminus\{0\}$，の形の解を持たない。

(3) $s_{\pi,\infty}(0,\sigma(0),\partial\phi(0))\neq0$

Th. 3-1. 非線型偏微分作用素 (1-1) に対し，$0\neq\sigma(z)\in\mathcal{O}(\Omega)$ は適当な $\omega\in\mathcal{C}_+$ と適当な $\pi\subset\mathfrak{L}$ に対し Ass. 2-1 をみたすとし，π に対し case I の条件が成立するものとする。このとき，(1-6) をみたす曲面 $S=\{\phi(z)=0\}$ がさらに Ass 3-1. をみたすならば，(2-) の形をし，condition (Σ) をみたす方程式 (1-8) の解が存在する。

case II ;

Def. 3-2. π は $(\sigma,\omega)\in\mathbb{C}\times\mathcal{C}_+$ に対する principal class

で，case II の条件が成り立っているとする。このとき，operator P の case II をみたす π に対する characteristic polynormial $q_\pi(z,\zeta)$ を，$\zeta\in\mathbb{C}^n$ の多項式として次のように定義する。

(3-5) $$q_\pi(z,\zeta) \equiv \sum_{\mu\in\pi} a_\mu(z)((\zeta^\alpha))^\mu$$

Def 3-3 π は $(\sigma,\omega)\in\mathbb{C}\times\mathcal{C}_+$ に対する principal class とし，case II の条件が成り立っているとする。このとき，π に対する transport operator の主部 $t_\pi(z,\sigma,\lambda,\zeta,\partial_z)$ 及び transport operator at $\lambda=\infty$ の主部 $t_{\pi,\infty}(z,\sigma,\zeta,\partial_z)$ を，それぞれ次のように定義する。

(3-6) $$t_\pi(z,\sigma,\lambda,\zeta,\partial_z) \equiv \left(\prod_{i=0}^m [\sigma:i]^{M_i}\right)\left[\sum_{\mu\in\pi} a_\mu(z)((\zeta^\alpha))^\mu \left\{\sum_{i=1}^m \frac{[\sigma+\lambda:i-1]}{[\sigma:i]} \times \left(\partial_\zeta \log\left(\prod_{|\alpha|=i}(\zeta^\alpha)^{\mu_\alpha}\right)\right)\cdot\partial_z\right\}\right],$$

(3-7) $$t_{\pi,\infty}(z,\sigma,\zeta,\partial_z)\equiv[\sigma:m]^{-1}\left(\prod_{i=0}^m[\sigma:i]^{M_i}\right)\left\{\sum_{\mu\in\pi} a_\mu(z)((\zeta^\alpha))^\mu\left(\partial_\zeta \log\left(\prod_{|\alpha|=m}(\zeta^\alpha)^{\mu_\alpha}\right)\right)\cdot\partial_z\right\}$$

我々は case II の仮定の下で，(1-6) をみたす曲面 $S=\{\phi(z)=0\}$ に対し次の条件を付ける。

Ass. 3-2. (1) $\phi(z)$ は case II の場合の characteristic equation

(3-8) $$q_\pi(z,\partial\phi(z))=0$$

をみたす。(2) 適当な $\eta\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ が存在して 次の λ の方程式は，$\lambda=\tilde{d}\cdot k$，$k\in\mathbb{Z}_+^M$ の形の解を持たない。

(3-9) $$t_\pi(0,\sigma,\lambda,\partial\phi(0),\eta)=0$$

(3) (2)の η に対し，

(3-10) $\quad t_{\pi,\infty}(0,\sigma,\partial\phi(0),\eta) \neq 0$

<u>Th. 3-2.</u> 非線型偏微分作用素 (1-1) に対し、$\sigma\in\mathbb{C}$ は適当な $\omega\in\mathcal{C}_+$ と適当な $\pi\subset\mathcal{L}$ に対し Ass 2-1 をみたすとし、π に対し case II の条件が成立するものとする。このとき (1-6) をみたす $S=\{\phi(z)=0\}$ が、さらに Ass. 3-2 をみたすならば、(2-6) の形をし、condition (Σ) をみたす方程式 (1-8) の解が存在する。

<u>Case III</u>.

<u>Def 3-4.</u> ある char. exp. σ_r $(0\le r\le Q-1)$ に対し、$\pi=\pi_{\sigma_r}$ であるとする。このとき、operator P の π_{σ_r} に対する <u>denominata polynormial</u> <u>$\Delta_{\sigma_r}(z,\lambda,\xi,X)$</u> 及び <u>denominator polyn. at $\lambda=\infty$</u> <u>$\Delta_{\sigma_r,\infty}(z,\xi,X)$</u> を、それぞれ $\lambda, X\in\mathbb{C}$ 及び $\xi\in\mathbb{C}^n$; 及び ξ, X の多項式として次のように定義する。

$$(3\text{-}11)\quad \Delta_{\sigma_r}(z,\lambda,\xi,X) \equiv \sum_{\mu\in\pi_{\sigma_r}} a_\mu(z)\Big(\sum_\alpha \mu_\alpha \frac{[\sigma_r+\lambda;|\alpha|]}{[\sigma_r;|\alpha|]}\Big)(([\sigma_r;|\alpha|]\xi^\alpha))^\mu X^{|\mu|}$$

$$(3\text{-}12)\quad \Delta_{\sigma_r,\infty}(z,\xi,X) \equiv \sum_{\mu\in\pi_{\sigma_r}} [\sigma_r;m]^{-1} a_\mu(z)\Big(\sum_{|\alpha|=m}\mu_\alpha\Big)(([\sigma_r;m]\xi^\alpha))^\mu X^{|\mu|}$$

case III の仮定の下で、我々は (1-6) をみたす曲面 $S=\{\phi(z)=0\}$ と $u_0(z)\in\mathcal{O}_1(\Omega)$ に対し次の仮定を置く。

<u>Ass. 3-3</u> (1) $\phi(z)$ と $u_0(z)$ は、characteristic equation

$$(3\text{-}13)\qquad p_{\sigma_r}(z,\partial\phi(z),u_0(z))=0$$

をみたす。 (2) λ の方程式

$$(3\text{-}14)\qquad \Delta_{\sigma_r}(0,\lambda,\partial\phi(0),u_0(0))=0$$

は，$\lambda = \alpha \cdot k$，$k \in \mathbb{Z}_+^M \setminus \{0\}$，の形の解を持たない。

(3) $s_{\sigma_I, 0}(0, \partial\phi(0), u_0(0)) \neq 0$

Th. 3-3. 非線型作用素 (1-1) に対し，σはある characteristic exponent σ_I に等しく，Ass. 2-1 がみたされるとする。このとき，(1-6) をみたす曲面 $S = \{\phi(z) = 0\}$ 及び $u_0(z) \in \mathcal{O}(\Omega)$ が，Ass. 3.3 をみたすならば，(2.7) の形をし，$u_{0,0}(z) = u_0(z)$ をみたし，かつ $^\forall \omega \in \mathcal{C}_I$ に対して condition (Σ) をみたす方程式 (1-8) の解が存在する。

Rem. 1. これまでの考察を，解の特異性を担う曲面 S の特徴づけ，という観点から振り返ってみると，線型の場合とは異った特徴が窺えて興味深い。我々は，いずれの case に於ても char. eq. をみたす曲面 $S = \{\phi(z) = 0\}$ に対し $\phi(z)$ に対するいくつかの non-zero conditions を課した上で，そこに特異性を持つ解を構成することが出来た。case I 及び case III では，char. eq. がそれぞれ任意性をもつ関数 $\sigma(z)$ 及び $u_0(z)$ を含むから，曲面 S に対する任意性は generic なそれである，ということができる。他方，case II では線型の場合の char. surface の性質が引継がれている。

Rem. 2. real variables で，semi-linear (elliptic eq.) の場合を考えてみると，lin. part は (2-4) をみたし，$\sigma > \sigma_{a-1}$ なる σ に対しては principal part になる。従って，このような σ に対しては

(2-6) の形の解は存在しない。しかし，非線形項によっては $\sigma=\sigma_{Q-1}$ に対し (2-7) の形の解を作れる場合があり，実際にある種の semi-lin. elliptic eq. の問題では，この σ_{Q-1} が解の regularity を保証する下限になっている。

§4. Construction of solutions. I. — 準備

我々は multi-index に対し2種類の順序（半順序及び全順序）を導入しておく。2つの multi index $\mathbb{k}=(k_1,\cdots,k_N)$, $\mathbb{l}=(l_1,\cdots,l_N)\in\mathbb{Z}_+^N$ に対し，$\underline{\mathbb{k}<\mathbb{l}} \Leftrightarrow \mathbb{k}\neq\mathbb{l}$ かつ $k_i\leq l_i$ for $1\leq\forall i\leq N$.

また $\underline{\mathbb{k}\prec\mathbb{l}} \Leftrightarrow \mathbb{k}\neq\mathbb{l}$ かつ (i) $|\mathbb{k}|<|\mathbb{l}|$，または，(ii) $|\mathbb{k}|=|\mathbb{l}|$ かつ $k_i\neq l_i$ である最初の i に対し $k_i<l_i$，と定める。

$\sigma(z),\phi(z)\in\mathcal{O}(\Omega)$，$l\in\mathbb{Z}_+$ とする。我々は $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$，$0\leqq\beta\leq\alpha$，$0\leqq i,j\leq|\alpha|$ に対し，$\partial^\gamma\sigma$ for $0\leqq\gamma\leq\alpha$，$\partial^\delta\phi$ for $0<\delta\leq\alpha$，l の多項式 $\underline{N_{i,j}^{\alpha,\beta}}=N_{ij}^{\alpha,\beta}(\sigma,\phi,l)$ を次の漸化式によって定義する。

(4-1)
(i) $0\leqq\beta\leq\alpha$ でない β，または $0\leqq i,j\leqq|\alpha|$ でない i,j に対しては $N_{i,j}^{\alpha,\beta}\equiv 0$

(ii) $N_{0,0}^{0,0}\equiv 1$.　(iii) $\alpha\geqq 0$ に対し，

$$N_{i,j}^{\alpha+e_k,\beta}\equiv(\sigma-j+1)\,\partial_k\phi\,N_{i-1,j-1}^{\alpha,\beta-e_k}+(l+i-j+1)\,\partial_k\phi\,N_{i,j-1}^{\alpha,\beta-e_k}+\partial_k\sigma\,N_{i-1,j}^{\alpha,\beta-e_k}+\partial_k N_{i,j}^{\alpha,\beta-e_k}+N_{i,j}^{\alpha,\beta},$$

但し，$e_k=(0,\cdots,\overset{k}{1},\cdots,0)\in\mathbb{Z}_+^n$，$k=1,\cdots,n$。この漸化式が

well-definedであることは初等的計算により確かめられる。

Lemma 4-1. (4-1)式により定められた $N_{i,j}^{\alpha,\beta}(\sigma,\phi,\ell)$ と $w(z)\in\mathcal{O}(\Omega)$ に対し，次の式が成り立つ。

$$(4\text{-}2)\qquad \partial^{\alpha}\left(\phi^{\sigma}(\log\phi)^{\ell}w\right)=\sum_{i=0}^{|\alpha|}\sum_{j=0}^{|\alpha|}\phi^{\sigma-j}(\log\phi)^{\ell+i-j}\Big(\sum_{0\leq\beta\leq\alpha}N_{i,j}^{\alpha,\beta}\,\partial^{\alpha-\beta}w\Big)$$

さて，我々はべき級数

$$(4\text{-}3)\qquad u(z)=(\phi(z))^{\sigma(z)}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^M}\sum_{\ell=0}^{|\mathbf{k}|}u_{\mathbf{k},\ell}(z)\,(\phi(z))^{\boldsymbol{\lambda}(z)\cdot\mathbf{k}}(\log\phi(z))^{\ell^*},$$

但し，$u_{\mathbf{k},\ell}(z)\in\mathcal{O}(\Omega)$，$\boldsymbol{\lambda}(z)=\boldsymbol{\lambda}(z)$ または $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(z)$，に対し，非線形な作用を含む種々の作用を考察する。まず，$\alpha\in\mathbb{Z}_+^{n}$ に対し

$$(4\text{-}4)\qquad u_{\mathbf{k},\ell}^{\alpha}\equiv\sum_{i=0}^{|\alpha|}\sum_{j=0}^{|\alpha|}\sum_{0\leq\beta\leq\alpha}N_{i,j}^{\alpha,\beta}(\sigma+\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k}-|\alpha|+j,\phi,|\mathbf{k}|-\ell+j\ \ i)\times$$
$$\times\,\partial^{\alpha-\beta}u_{\mathbf{k}-(|\alpha|-j)\#_0,\,\ell-|\alpha|+i}$$

と置く。lemma 4-1 から次を得る。

Lemma 4-2. べき級数(4-3)が $z\in\mathcal{R}(\Omega\setminus\{\phi=0\})$ で収束すれば，次が成り立つ。

$$(4\text{-}5)\qquad \partial^{\alpha}u(z)=(\phi(z))^{\sigma(z)-|\alpha|}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^M}\sum_{\ell=0}^{|\mathbf{k}|}u_{\mathbf{k},\ell}^{\alpha}(\phi)^{\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{k}}(\log\phi)^{\ell^*}$$

我々は，$\mathbb{D}\equiv\{(\mathbf{k},\ell)\in\mathbb{Z}_+^M\times\mathbb{Z}_+;\ 0\leq\ell\leq|\mathbf{k}|\}$ と置き，さらに $\Delta(\alpha:\mathbf{k},\ell)\equiv\{(\mathbb{K},p)\in\mathbb{D};\ \mathbb{K}=\mathbf{k}-t\#_0,\ (\ell-|\alpha|)\vee0\leq p\leq\ell-t$ for $t=0,1,\cdots,|\alpha|\}$ と置く。このとき，$u_{\mathbf{k},\ell}^{\alpha}$ は $u_{\mathbb{K},p}$ for $(\mathbb{K},p)\in\Delta(\alpha:\mathbf{k},\ell)$，及びそれらの偏導関数の1次式として表されるが，形式解の構成に必要となる部分をさらに精密に求めておく。$x\in\mathbb{C}$，$k\in\mathbb{Z}_+$ 及び $\ell\in\mathbb{Z}$ for $\ell\leq k$ に対し，$[x;k,\ell]$ を $[x;k,\ell]=0$ for $\ell<0$，$[x;k,0]=1$ また

$$[x;k,\ell]\equiv\sum_{0\leq i_1<\cdots<i_\ell\leq k-1}(x-i_1)\cdots(x-i_\ell)\quad\text{for }\ell>0,$$

と置

く。次のように置く。

(4-6-1) $u^{\alpha}_{\mathbb{k},\ell} = [\sigma + \delta\cdot\mathbb{k} ; |\alpha|](\partial\phi)^{\alpha} u_{\mathbb{k},\ell} + R^{\alpha}_{\mathbb{k},\ell}$

(4-6-2) $u^{\alpha}_{\mathbb{k},\ell} = [\sigma + \delta\cdot\mathbb{k} - 1 ; |\alpha|-1](\partial\phi)^{\alpha} D_{\alpha,\phi}\, u_{\mathbb{k}-\mathbb{h}_0,\ell-1} + (\partial\phi)^{\alpha} \mathring{u}^{\alpha}_{\mathbb{k},\ell} + \tilde{R}^{\alpha}_{\mathbb{k},\ell}$,

但し，ここに $(\partial\phi)^{\alpha}\underline{D_{\alpha,\phi}}$ は，1階の偏微分作用素 $(\partial\phi)^{\alpha} D_{\alpha,\phi} \equiv \sum_{p=1}^{n} \alpha_p (\partial\phi)^{\alpha - e_p}\partial_p + \sum_{|\gamma|=2} \binom{\alpha}{\gamma}(\partial\phi)^{\alpha-\gamma}\partial^{\gamma}\phi$，を表し，また，$\underline{\mathring{u}^{\alpha}_{\mathbb{k},\ell}} \equiv \sum_{j=0}^{\ell} [\ell + j ; j][\sigma + \delta\cdot\mathbb{k} ; |\alpha|, |\alpha| - j]\, u_{\mathbb{k},\ell-j}$ である。

<u>Lemma 4-3</u> (4-6-1), (4-6-2) により定められた $R^{\alpha}_{\mathbb{k},\ell}$, $\tilde{R}^{\alpha}_{\mathbb{k},\ell}$ に対し

(1) $R^{\alpha}_{\mathbb{k},\ell}$ は，$u_{\mathbb{K},p}$ for $(\mathbb{K},p) \in \triangle(\alpha ; \mathbb{k},\ell)$ 且 $(\mathbb{K},p) < (\mathbb{k},\ell)$，及びそれらの偏導関数の $\mathcal{O}(\Omega)$-係数の1次式である。

(2) $\sigma \equiv \text{const.}$ ならば，$\tilde{R}^{\alpha}_{\mathbb{k},\ell}$ は $u_{\mathbb{K},p}$ for $(\mathbb{K},p) \in \triangle(\alpha : \mathbb{k},\ell)$ 且 $(\mathbb{K},p) < (\mathbb{k}-\mathbb{h}_0, \ell-1)$，及びそれらの偏導関数の1次式である。

次に我々は，$(\partial^{\alpha}u)^{\mu_\alpha}$，$((\partial^{\alpha}u))^{\mu}$ 及び $P[u]$ を計算する。この計算は，不定元 $(\mathbb{X}, Y) = (X_1, \cdots X_M, Y)$ の形式的べキ級数 $\sum_{(\mathbb{k},\ell)\in\mathbb{D}} u^{\alpha}_{\mathbb{k},\ell}\, \mathbb{X}^{\mathbb{k}} Y^{\ell}$ のべキや積の計算と同じである。与えられた $N \in \mathbb{N}$，$(\mathbb{k},\ell) \in \mathbb{D}$ に対し multi-index の集合 $\underline{\mathcal{B}(N ; \mathbb{k},\ell)}$ を $\mathcal{B}(N ; \mathbb{k},\ell) \equiv \{ (\mathbb{j}_\rho, \mathbb{K}_\rho) ; \rho \in \mathbb{N},\ \mathbb{j}_\rho = (j_1, \cdots, j_\rho) \in \mathbb{N}^{\rho}$, $\mathbb{K}_\rho = ((\mathbb{k}_1, \ell_1), \cdots, (\mathbb{k}_\rho, \ell_\rho)) \in \mathbb{D}^{\rho}$, $|\mathbb{j}_\rho| = N$, $(\mathbb{k}_1, \ell_1) \prec \cdots \prec (\mathbb{k}_\rho, \ell_\rho)$ かつ $\sum_{\tau=1}^{\rho} j_\tau (\mathbb{k}_\tau, \ell_\tau) = (\mathbb{k},\ell) \}$，と置く。さらに，$\mu = (\mu_\alpha) \in \mathcal{L}$，$(\mathbb{k},\ell) \in \mathbb{D}$ に対し，$\underline{\mathcal{C}(\mu ; \mathbb{k},\ell)} \equiv \{ ((\mathbb{j}_{\rho_\alpha}, \mathbb{K}_{\rho_\alpha}))_{\alpha ; \mu_\alpha \neq 0} \in \prod_{\alpha : \mu_\alpha \neq 0} \mathcal{B}(\mu_\alpha ; \mathbb{k}_\alpha, \ell_\alpha) ; (\mathbb{k}_\alpha, \ell_\alpha) \in \mathbb{D},\ \sum_{\alpha} (\mathbb{k}_\alpha, \ell_\alpha) = (\mathbb{k},\ell) \}$，と置く。$\mathcal{C}(\mu ; \mathbb{k},\ell)$ の一般の元 $((\mathbb{j}_{\rho_\alpha}, \mathbb{K}_{\rho_\alpha}))_{\alpha}$ を我々は $\mathbb{j}_{\rho_\alpha} = (j^{\alpha}_1, \cdots, j^{\alpha}_{\rho_\alpha})$，

$\mathbb{K}_{p_\alpha} = ((\mathbb{k}_1^\alpha, \ell_1^\alpha), \cdots, (\mathbb{k}_{p_\alpha}^\alpha, \ell_{p_\alpha}^\alpha))$ と表示することにしよう。我々は

(4-7) $\underline{u_{\mathbb{k},\ell}^{\alpha,N}} \equiv \sum_{(\mathring{j}_p, \mathbb{K}_p) \in \mathcal{B}(N;\mathbb{k},\ell)} \binom{N}{\mathring{j}_p} \prod_{\tau=1}^{p} (u_{\mathbb{k}_\tau, \ell_\tau}^\alpha)^{j_\tau}$

(4-8) $\underline{u_{\mathbb{k},\ell}^{\mu}} \equiv \sum_{((\mathring{j}_{p_\alpha}, \mathbb{K}_{p_\alpha}))_\alpha \in \mathcal{C}(\mu;\mathbb{k},\ell)} \prod_{\alpha:\mu_\alpha \neq 0} \left\{ \binom{\mu_\alpha}{\mathring{j}_{p_\alpha}} \prod_{\tau=1}^{p_\alpha} (u_{\mathbb{k}_\tau^\alpha, \ell_\tau^\alpha}^\alpha)^{j_\tau^\alpha} \right\}$

(4-9) $\underline{w_{\mathbb{k},\ell}} \equiv \sum_{\mu \in \pi_*} a_\mu(z)\, u_{\mathbb{k},\ell}^\mu + \sum_{\mu \in \mathcal{L}\setminus\pi_*} a_\mu(z)\, u_{\mathbb{k}-\mathbb{l}_\mu, \ell-s_\mu}^\mu$

と定める，但し，$\underline{\binom{N}{\mathring{j}_p}} \equiv \binom{N}{j_1 \cdots j_p}$，また case I or II では $\pi_* = \pi$，case III では $\pi^* = \pi_{\sigma_I}$ とする。

<u>Lemma 4-4</u>　べき級数 (4-3) が，$z \in \mathcal{R}(\Omega \setminus \{\phi=0\})$ で収束するならば，次が成り立つ。 (4-10)　$(\partial^\alpha u(z))^N = (\phi(z))^{(\sigma(z)-\lvert\alpha\rvert)N} \sum_{(\mathbb{k},\ell)\in\mathbb{D}} u_{\mathbb{k},\ell}^{\alpha,N} (\phi(z))^{\delta(z)\cdot\mathbb{k}} (\log\phi(z))^{\ell^*}$ (4-11)　$((\partial^\alpha u(z)))^\mu = (\phi(z))^{y_\mu(\sigma(z))} \sum_{(\mathbb{k},\ell)\in\mathbb{D}} u_{\mathbb{k},\ell}^{\mu} (\phi(z))^{\delta(z)\cdot\mathbb{k}} (\log\phi(z))^{\ell^*}$ (4-12)　$\underline{P[u](z) = (\phi(z))^{y_\pi(\sigma(z))} \sum_{(\mathbb{k},\ell)\in\mathbb{D}} w_{\mathbb{k},\ell} (\phi(z))^{\delta(z)\cdot\mathbb{k}} (\log\phi(z))^{\ell^*}}$

$w_{\mathbb{k},\ell}$ は，$u_{\mathbb{K},p}$ for $(\mathbb{K},p)\in\mathbb{D}$ 且 $(\mathbb{K},p) \leqq (\mathbb{k},\ell)$，及びそれらの偏導関数として表されるが，これに対しても形式解の構成に必要な範囲で精密な表示を与えておく。我々のやり方は，case I，III では，$w_{\mathbb{k},\ell}$ の $u_{\mathbb{k},\ell}$ を含む部分を計算し，case II では，$u_{\mathbb{k}-\#_0, \ell-1}$ を含む部分及び $u_{\mathbb{K},p}$ for $(\mathbb{K},p) \neq (\mathbb{k}-\#_0, \ell-1)$ を含む部分を計算することである。まず，$u_{\mathbb{k},\ell}^\mu$ に対して始めよう。$\mathcal{C}(\mu;\mathbb{k},\ell)$ に対し，次のような三つの部分集合を定める。$\underline{\mathcal{C}_1(\mu;\mathbb{k},\ell)} \equiv \{((\mathring{j}_{p_\alpha}, \mathbb{K}_{p_\alpha}))_\alpha \in \mathcal{C} ;\ \mathbb{k}_\tau^\alpha < \mathbb{k}$ for $\forall\alpha,\ 1 \leqq \forall\tau \leqq p_\alpha\}$

，$\underline{\mathcal{C}_2(\mu;\mathbb{k},\ell)} \equiv \{((\mathring{j}_{p_\alpha}, \mathbb{K}_{p_\alpha}))_\alpha \in \mathcal{C}_1 ;\ \exists\tilde{\alpha}\ \&\ 1 \leqq \exists\tilde{\tau} \leqq p_{\tilde{\alpha}}$ s.t. $\ell_{\tilde{\tau}}^{\tilde{\alpha}} = \ell\}$

，$\underline{\mathcal{C}_3(\mu;\mathbb{k},\ell)} \equiv \{((\mathring{j}_{p_\alpha}, \mathbb{K}_{p_\alpha}))_\alpha \in \mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{C}_3 ;\ \exists\tilde{\alpha}\ \&\ 1 \leqq \exists\tilde{\tau} \leqq p_{\tilde{\alpha}}$ s.t. $(\mathbb{k}_{\tilde{\tau}}^{\tilde{\alpha}})_0 = (\mathbb{k})_0\}$

，但し $(\mathbb{k}^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\tau}})_0$，$(\mathbb{k})_0$ はそれぞれの vector の第1成分を表す。我々は，$u^{\mu}_{\mathbb{k},\ell}$ に対し次のように置く。

(4-13-1) $$u^{\mu}_{\mathbb{k},\ell} = (u_{\emptyset,0})^{|\mu|-1}\Big(\sum_{\alpha}\mu_\alpha \frac{[\sigma+\delta\cdot\mathbb{k}\,;|\alpha|]}{[\sigma:|\alpha|]}\Big)(([\sigma:|\alpha|](\partial\phi)^{\alpha}))^{\mu}\times u_{\mathbb{k},\ell} + R^{\mu}_{\mathbb{k},\ell} \quad \text{for } \mathbb{k}>0,$$

(4-13-2) $$u^{\mu}_{\sharp_0,1} = (u_{\emptyset,0})^{|\mu|-1}(([\sigma:|\alpha|](\partial\phi)^{\alpha}))^{\mu}\Big(\sum_{\alpha}\mu_\alpha\frac{[\sigma:|\alpha|-1]}{[\sigma:|\alpha|]}D_{\alpha,\phi}\Big)u_{\emptyset,0} + S^{\mu}_{\sharp_0,1}$$

$$\begin{aligned} u^{\mu}_{2\sharp_0,2} = {} & (u_{\emptyset,0})^{|\mu|-1}(([\sigma:|\alpha|](\partial\phi)^{\alpha}))^{\mu}\Big\{\sum_{\alpha}\mu_\alpha\times \\ & \times\frac{[\sigma+1:|\alpha|-1]}{[\sigma:|\alpha|]}D_{\alpha,\phi} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\mu_\alpha\frac{[\sigma:|\alpha|-1][\sigma+1:|\alpha|]}{([\sigma:|\alpha|])^2}\cdot\frac{D_{\alpha,\phi}u_{\emptyset,0}}{u_{\emptyset,0}} + \\ & + \frac{1}{2}\Big(\sum_{\alpha}\mu_\alpha\frac{[\sigma:|\alpha|-1]}{[\sigma:|\alpha|]}\cdot\frac{D_{\alpha,\phi}u_{\emptyset,0}}{u_{\emptyset,0}}\Big)\Big(\sum_{\alpha}\mu_\alpha\frac{[\sigma+1:|\alpha|]}{[\sigma:|\alpha|]}\Big)\Big\}u_{\sharp_0,1} + S^{\mu}_{2\sharp_0,2} + \tilde{R}^{\mu}_{2\sharp_0,2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^{\mu}_{\mathbb{k},\ell} = {} & (u_{\emptyset,0})^{|\mu|-1}(([\sigma:|\alpha|](\partial\phi)^{\alpha}))^{\mu}\Big\{\sum_{\alpha}\mu_\alpha\frac{[\sigma+\delta\cdot\mathbb{k}-1\,;|\alpha|-1]}{[\sigma:|\alpha|]}D_{\alpha,\phi} + \\ & + \Big(\sum_{\alpha}\mu_\alpha\frac{[\sigma:|\alpha|-1]}{[\sigma:|\alpha|]}\frac{D_{\alpha,\phi}u_{\emptyset,0}}{u_{\emptyset,0}}\Big)\Big(\sum_{\alpha}\mu_\alpha\frac{[\sigma+\delta\cdot\mathbb{k}-1\,;|\alpha|]}{[\sigma:|\alpha|]}\Big) - \sum_{\alpha}\mu_\alpha\frac{[\sigma:|\alpha|-1]}{[\sigma:|\alpha|]}\times \\ & \times\frac{[\sigma+\delta\cdot\mathbb{k}-1:|\alpha|]}{[\sigma:|\alpha|]}\cdot\frac{D_{\alpha,\phi}u_{\emptyset,0}}{u_{\emptyset,0}}\Big\}u_{\mathbb{k}-\sharp_0,\ell-1} + S^{\mu}_{\mathbb{k},\ell} + \tilde{R}^{\mu}_{\mathbb{k},\ell} \quad \text{for} \end{aligned}$$

$(\mathbb{k},\ell) > (\sharp_0,1)$ & $(\mathbb{k},\ell) \neq (2\sharp_0,2)$，但しここに，

(4-14) $$\underline{S^{\mu}_{\sharp_0,1}} \equiv (u_{\emptyset,0})^{|\mu|-1}(([\sigma:|\alpha|](\partial\phi)^{\alpha}))^{\mu}\Big(\sum_{\alpha}\mu_\alpha\frac{\mathring{u}^{\alpha}_{\sharp_0,1}}{[\sigma:|\alpha|]}\Big)$$

$$\begin{aligned} \underline{S^{\mu}_{2\sharp_0,2}} \equiv {} & (u_{\emptyset,0})^{|\mu|-1}(([\sigma:|\alpha|](\partial\phi)^{\alpha}))^{\mu}\Big[\sum_{\alpha}\mu_\alpha\frac{\mathring{u}^{\alpha}_{2\sharp_0,2}}{[\sigma:|\alpha|]} + \frac{1}{2}\Big\{\Big(\sum_{\alpha}\mu_\alpha\frac{\mathring{u}^{\alpha}_{\sharp_0,1}}{[\sigma:|\alpha|]}\Big)\times \\ & \times\Big(\sum_{\alpha}\mu_\alpha\frac{[\sigma+1:|\alpha|]}{[\sigma:|\alpha|]}\Big) - \sum_{\alpha}\mu_\alpha\frac{[\sigma+1:|\alpha|]\,\mathring{u}^{\alpha}_{\sharp_0,1}}{([\sigma:|\alpha|])^2}\Big\}\frac{u_{\sharp_0,1}}{u_{\emptyset,0}}\Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{S^{\mu}_{\mathbb{k},\ell}} \equiv {} & (u_{\emptyset,0})^{|\mu|-1}(([\sigma:|\alpha|](\partial\phi)^{\alpha}))^{\mu}\Big[\sum_{\alpha}\mu_\alpha\frac{\mathring{u}^{\alpha}_{\mathbb{k},\ell}}{[\sigma:|\alpha|]} + \Big\{\Big(\sum_{\alpha}\mu_\alpha\frac{\mathring{u}^{\alpha}_{\sharp_0,1}}{[\sigma:|\alpha|]}\Big)\times \\ & \times\Big(\sum_{\alpha}\mu_\alpha\frac{[\sigma+\delta\cdot\mathbb{k}-1:|\alpha|]}{[\sigma:|\alpha|]}\Big) - \sum_{\alpha}\mu_\alpha\frac{[\sigma+\delta\cdot\mathbb{k}-1:|\alpha|]\,\mathring{u}^{\alpha}_{\sharp_0,1}}{([\sigma:|\alpha|])^2}\Big\}\frac{u_{\mathbb{k}-\sharp_0,\ell-1}}{u_{\emptyset,0}}\Big] + \\ & + \sum_{((\mathring{j}_{p_\alpha},\mathbb{k}_{p_\alpha}))_\alpha\in\mathscr{C}_2(\mu;\mathbb{k},\ell)}\Big\{\prod_{\alpha\neq\tilde{\alpha}}\binom{\mu_\alpha}{\mathring{j}_{p_\alpha}}\prod_{\tau=1}^{p_\alpha}(u^{\alpha}_{\mathbb{k}^{\alpha}_{\tau},0})^{j^{\alpha}_{\tau}}\Big\}\Big\{\binom{\mu_{\tilde{\alpha}}}{\mathring{j}_{p_{\tilde{\alpha}}}}\prod_{\tau\neq\tilde{\tau}}(u^{\tilde{\alpha}}_{\mathbb{k}^{\tilde{\alpha}}_{\tau},0})^{j^{\tilde{\alpha}}_{\tau}}\Big\}(\mathring{u}^{\tilde{\alpha}}_{\mathbb{k}^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\tau}},\ell})(\partial\phi)^{\tilde{\alpha}} + \\ & + \sum_{((\mathring{j}_{p_\alpha},\mathbb{k}_{p_\alpha}))_\alpha\in\mathscr{C}_3(\mu:\mathbb{k},\ell)}\Big\{\prod_{\alpha\neq\tilde{\alpha}}\binom{\mu_\alpha}{\mathring{j}_{p_\alpha}}\prod_{\tau=1}^{p_\alpha}(u^{\alpha}_{\mathbb{k}^{\alpha}_{\tau},\ell^{\alpha}_{\tau}})^{j^{\alpha}_{\tau}}\Big\}\Big\{\binom{\mu_{\tilde{\alpha}}}{\mathring{j}_{p_{\tilde{\alpha}}}}\prod_{\tau\neq\tilde{\tau}}(u^{\tilde{\alpha}}_{\mathbb{k}^{\tilde{\alpha}}_{\tau},\ell^{\tilde{\alpha}}_{\tau}})^{j^{\tilde{\alpha}}_{\tau}}\Big\}(\mathring{u}^{\tilde{\alpha}}_{\mathbb{k}^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\tau}},\ell^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\tau}}})(\partial \end{aligned}$$

for $(\mathbb{k},\ell) > (\sharp_0,1)$ & $(\mathbb{k},\ell) \neq (2\sharp_0,2)$，

である。

Lemma 4-5 (4-13-1), (4-13-2) により定められた $R^{\mu}_{\mathbb{k},l}$ $((\mathbb{k},l)>(\mathbb{0},0))$, $\tilde{R}^{\mu}_{\mathbb{k},l}$ $((\mathbb{k},l)\geqq(\#_0,1))$ に対し (1) $R^{\mu}_{\mathbb{k},l}$ は, $u_{\mathbb{k},p}$ for $(\mathbb{k},p)<(\mathbb{k},l)$, 及びそれらの偏導関数の $\mathcal{O}(\Omega)$ 係数多項式である。

(2) $\sigma\equiv \mathrm{const.}$ ならば, $\tilde{R}^{\mu}_{\mathbb{k},l}$ は $u_{\mathbb{k},p}$ for $(\mathbb{k},p)<(\mathbb{k}-\#_0,l-1)$, 及びそれらの偏導関数の多項式である。

この lemma から我々は $w_{\mathbb{k},l}$ に対する次の表示を得る。

(4-15) $$w_{\mathbb{0},0}=\sum_{\mu\in\pi_*}a_\mu(z)\left(\left([\sigma:|\alpha|](\partial\phi)^\alpha\right)\right)^\mu(u_{\mathbb{0},0})^{|\mu|}$$

(4-16) $$w_{\mathbb{k},l}=\Big\{\sum_{\mu\in\pi_*}a_\mu(z)\Big(\sum_\alpha\mu_\alpha\frac{[\sigma+\delta\cdot\mathbb{k}:|\alpha|]}{[\sigma:|\alpha|]}\Big)\left(\left([\sigma:|\alpha|](\partial\phi)^\alpha\right)\right)^\mu\times(u_{\mathbb{0},0})^{|\mu|-1}\Big\}u_{\mathbb{k},l}+R_{\mathbb{k},l}\quad\text{for }(\mathbb{k},l)>(\mathbb{0},0)$$

但しここに $\underline{R_{\mathbb{k},l}}\equiv\sum_{\mu\in\pi_*}a_\mu(z)R^\mu_{\mathbb{k},l}+\sum_{\mu\in\mathcal{L}\setminus\pi_*}a_\mu(z)u^\mu_{\mathbb{k}-l_\mu,\,l-s_\mu}$.

さらに, case II-(1) の条件の下で

(4-17) $$\begin{aligned}w_{\#_0,1}&=(u_{\mathbb{0},0})^{|\pi|-1}\Big\{\sum_{\mu\in\pi}a_\mu(z)\left(\left([\sigma:|\alpha|]\partial\phi\right)^\alpha\right)^\mu\Big(\sum_\alpha\mu_\alpha\frac{[\sigma:|\alpha|-1]}{[\sigma:|\alpha|]}\times D_{\alpha,\phi}\Big)+\sum_{\mu\in\pi_1}a_\mu(z)\left(\left([\sigma:|\alpha|](\partial\phi)^\alpha\right)\right)^\mu\Big\}u_{\mathbb{0},0}+\sum_{\mu\in\pi}a_\mu(z)S^\mu_{\#_0,1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_{2\#_0,2}&=(u_{\mathbb{0},0})^{|\pi|-1}\Big[\sum_{\mu\in\pi}a_\mu(z)\left(\left([\sigma:|\alpha|](\partial\phi)^\alpha\right)\right)^\mu\Big\{\sum_\alpha\mu_\alpha\frac{[\sigma+1:|\alpha|-1]}{[\sigma:|\alpha|]}D_{\alpha,\phi}+\\&+\frac{1}{2}\Big(\sum_\alpha\mu_\alpha\frac{[\sigma:|\alpha|-1]}{[\sigma:|\alpha|]}\frac{D_{\alpha,\phi}u_{\mathbb{0},0}}{u_{\mathbb{0},0}}\Big)\Big(\sum_\alpha\mu_\alpha\frac{[\sigma+1:|\alpha|]}{[\sigma:|\alpha|]}\Big)-\frac{1}{2}\sum_\alpha\mu_\alpha\frac{[\sigma:|\alpha|-1][\sigma+1:|\alpha|]}{([\sigma:|\alpha|])^2}\times\\&\times\frac{D_{\alpha,\phi}u_{\mathbb{0},0}}{u_{\mathbb{0},0}}\Big\}+\sum_{\mu\in\pi_1}a_\mu(z)\left(\left([\sigma:|\alpha|](\partial\phi)^\alpha\right)\right)^\mu\Big(\sum_\alpha\mu_\alpha\frac{[\sigma+1:|\alpha|]}{[\sigma:|\alpha|]}\Big)\Big]u_{\#_0,1}+\\&+\sum_{\mu\in\pi}a_\mu(z)S^\mu_{2\#_0,2}+\tilde{R}_{2\#_0,2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_{\mathbb{k},l}&=(u_{\mathbb{0},0})^{|\pi|-1}\Big[\sum_{\mu\in\pi}a_\mu(z)\left(\left([\sigma:|\alpha|](\partial\phi)^\alpha\right)\right)^\mu\Big\{\sum_\alpha\mu_\alpha\frac{[\sigma+\delta\cdot\mathbb{k}-1:|\alpha|]}{[\sigma:|\alpha|]}D_{\alpha,\phi}+\\&+\Big(\sum_\alpha\mu_\alpha\frac{[\sigma:|\alpha|-1]}{[\sigma:|\alpha|]}\cdot\frac{D_{\alpha,\phi}u_{\mathbb{0},0}}{u_{\mathbb{0},0}}\Big)\Big(\sum_\alpha\mu_\alpha\frac{[\sigma+\delta\cdot\mathbb{k}-1:|\alpha|]}{[\sigma:|\alpha|]}\Big)-\sum_\alpha\mu_\alpha\frac{D_{\alpha,\phi}u_{\mathbb{0},0}}{u_{\mathbb{0},0}}\times\\&\times\frac{[\sigma:|\alpha|-1][\sigma+\delta\cdot\mathbb{k}-1]}{([\sigma:|\alpha|])^2}\Big\}+\sum_{\mu\in\pi_1}a_\mu(z)\left(\left([\sigma:|\alpha|](\partial\phi)^\alpha\right)\right)^\mu\Big(\sum_\alpha\mu_\alpha\frac{[\sigma+\delta\cdot\mathbb{k}-1:|\alpha|]}{[\sigma:|\alpha|]}\Big)\Big]\times\\&\times u_{\mathbb{k}-\#_0,l-1}+\sum_{\mu\in\pi}a_\mu(z)S^\mu_{\mathbb{k},l}+\tilde{R}_{\mathbb{k},l}\quad\text{for }(\mathbb{k},l)>(\#_0,1)\ \&\ (\mathbb{k},l)\neq(2\#_0,2)\end{aligned}$$

但し、$\underline{\tilde{R}_{\mathbb{k},\ell}} \equiv \sum_{\mu\in\pi} a_\mu(z)\tilde{R}^\mu_{\mathbb{k},\ell} + \sum_{\mu\in\pi_1} a_\mu(z) R^\mu_{\mathbb{k},\ell} + \sum_{\mu\in\mathcal{I}\setminus\pi\cup\pi_1} a_\mu(z) u^\mu_{\mathbb{k}-\mathbb{e}_\mu,\ell-\delta_\mu}$

for $(\mathbb{k},\ell) > (\#_0,1)$.

> <u>Lemma 4-6</u> (4-16), (4-17) により定められた $R_{\mathbb{k},\ell}$, $\tilde{R}_{\mathbb{k},\ell}$ に対し、(1) $R_{\mathbb{k},\ell}$ は、$u_{\mathbb{K},p}$ for $(\mathbb{K},p) < (\mathbb{k},\ell)$, 及びそれらの偏導関数の多項式である。(2) case II-(1) の条件が成り立つならば、$\tilde{R}_{\mathbb{k},\ell}$ は $u_{\mathbb{K},p}$ for $(\mathbb{K},p) < (\mathbb{k}-\#_0,\ell-1)$, 及びそれらの偏導関数の多項式である。

<u>§5 Construction of solutions II</u>. 解 (2-5) ~ (2-7) の構成は、case I, III では方程式 $w_{\mathbb{k},\ell} = 0$ を、また、case II では $w_{\mathbb{k}+\#_0,\ell+1} = 0$ を $(\mathbb{k},\ell)$ の順序 ≦ に従って順次解き、$u_{\mathbb{k},\ell}$ を決定することにより行われる。case I, III では、それは単に1次方程式を解くことであり、case II では $u_{\mathbb{k},\ell}$ に関する1階偏微分方程式を解くことになる。

<u>1</u>. <u>case I</u> 我々は、曲面 $S = \{\phi(z) = 0\}$ を (1-6) 及び Ass. 3-1 をみたすように任意にとって固定する。まず、$u_{0,0} \in \mathcal{O}_1(\Omega)$ を任意に取る。(4-15) より $w_{0,0} = p_\pi(z,\sigma(z),\partial\phi(z))(u_{0,0})^{|\pi|}$ であるから (Ass. 3-1 から) $w_{0,0} = 0$ は自動的にみたされる。次に、

$$(5.1)\qquad u_{\mathbb{k},\ell} = -\frac{R_{\mathbb{k},\ell}}{p_\pi(z,\sigma(z),\alpha(z)\cdot\mathbb{k},\partial\phi(z))(u_{0,0})^{|\pi|-1}} \quad \text{for } (\mathbb{k},\ell) >$$

と置けば、lemma 4-6 (1) により全ての $u_{\mathbb{k},\ell}$ を、$(\mathbb{k},\ell)$ の順序 ≦ に関し帰納的に決定することができ、Ass. 3-1 (2) より

$0 \in {}^{\exists}\Omega' \underset{open}{\subset} \Omega$ に対し $u_{\mathbb{k},\ell} \in \mathcal{O}(\Omega')$ である。(4-16) によれば，$(\mathbb{k},\ell) > (0,0)$ に対し $w_{\mathbb{k},\ell} = s_\pi(z,\sigma(z),d(z)\cdot\mathbb{k},\partial\phi(z))(u_{0,0})^{|\pi|-1}u_{\mathbb{k},\ell} + R_{\mathbb{k},\ell}$ であるから，$w_{\mathbb{k},\ell} = 0$ が全ての $(\mathbb{k},\ell) > (0,0)$ に対しても満たされることになる。

2. Case II　この case の特徴は，次の lemma に示される。

> **Lemma 5-1.** Case II の条件が満たされ，さらに $\phi(z) \in \mathcal{O}_0(\Omega)$ が Ass 3-2 (1) を満たすならば，次が成り立つ。(1) $w_{\mathbb{k},0} \equiv 0$ for $\forall \mathbb{k} \in \mathbb{Z}_+^M$. (2) $w_{(0,\mathbb{k}'),\ell} \equiv 0$ for $\forall \mathbb{k}' \in \mathbb{Z}_+^{M-1}$ s.t. $((0,\mathbb{k}'),\ell) \in \mathbb{D}$. (3) $\sum_{\mu\in\pi} a_\mu(z) S^\mu_{\mathbb{k}+\#_0,\ell+1} \equiv 0$ for $\forall(\mathbb{k},\ell) \in \mathbb{D}$

この lemma は，case II の条件の下では，恒等式の左辺がすべて $\zeta = \partial\phi(z)$ の多項式として $g_\pi(z,\zeta)$ で割り切れることから従う。扨，我々は case II の条件の下で，曲面 $S = \{\phi(z) = 0\}$ を (1.6) 及び Ass. 3-2 をみたすように任意に取って固定する。このとき，(4-17) に lemma 5-1 を適用することにより，$w_{\mathbb{k}+\#_0,\ell+1}$ に対して次の表示が得られる。

$$(5\text{-}2)\quad w_{\#_0,1} = (u_{0,0})^{|\pi|-1}\Big(t_\pi(z,\sigma,0,\partial\phi(z),\partial_z) + r_\pi(z,\sigma,\partial\phi(z),\partial^\gamma\phi(z))\Big)u_{0,0}$$

$$w_{2\#_0,2} = (u_{0,0})^{|\pi|-1}\Big(t_\pi(z,\sigma,1,\partial\phi(z),\partial_z) + r^1_\pi\big(z,\sigma,\partial\phi(z),\partial^\gamma\phi(z),\frac{D_{\alpha,\phi}u_{0,0}}{u_{0,0}}\big)\Big)\times$$
$$\times\, u_{\#_0,1} + \tilde{R}_{2\#_0,2},$$

$$w_{\mathbb{k}+\#_0,\ell+1} = (u_{0,0})^{|\pi|-1}\Big(t_\pi(z,\sigma,\tilde{d}\cdot\mathbb{k},\partial\phi(z),\partial_z) + r_\pi\big(z,\sigma,\tilde{d}\cdot\mathbb{k},\partial\phi(z),$$
$$,\partial^\gamma\phi(z),\frac{D_{\alpha,\phi}u_{0,0}}{u_{0,0}}\big)\Big)u_{\mathbb{k},\ell} + \tilde{R}_{\mathbb{k}+\#_0,\ell+1}\quad \text{for } (\mathbb{k},\ell)\in\mathbb{D},$$

$(\mathbb{k},\ell) \neq (0,0)\,\gamma(\#_0,1)$，但し，$\underline{r^0_\pi(z,\sigma,\xi,\zeta)} \equiv \left(\prod_{i=0}^{m}[\sigma:i]^{M_i}\right)\Big[\sum_{\mu\in\pi} a_\mu(z)\times$

$\times (([\sigma:|\alpha|](\partial\phi)^{\alpha}))^{\mu}\Big\{\sum_{\alpha}\mu_{\alpha}\frac{[\sigma:|\alpha|-1]}{[\sigma:|\alpha|]}\Big(\sum_{|\gamma|=2}\binom{\alpha}{\gamma}(\xi)^{-\gamma}\zeta_{\gamma}\Big)\Big\}\Big] + \sum_{\mu\in\pi_1} a_{\mu}(z)(([\sigma:|\alpha|]\times \xi^{\alpha}))^{\mu}$, $\quad \underline{\mathfrak{r}^{1}_{\pi}(z,\sigma,\xi,\zeta,\chi)} \equiv \Big(\prod_{i=0}^{m}[\sigma:i]^{M_i}\Big)\Big[\sum_{\mu\in\pi} a_{\mu}(z)(([\sigma:|\alpha|]\xi^{\alpha}))^{\mu}\Big\{\sum_{\alpha}\mu_{\alpha}\times \frac{[\sigma+1:|\alpha|-1]}{[\sigma:|\alpha|]}\Big(\sum_{|\gamma|=2}\binom{\alpha}{\gamma}(\xi)^{-\gamma}\zeta_{\gamma}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\sum_{\alpha}\mu_{\alpha}\frac{[\sigma:|\alpha|-1]}{[\sigma:|\alpha|]}\chi\Big)\Big(\sum_{\alpha}\mu_{\alpha}\frac{[\sigma+1:|\alpha|]}{[\sigma:|\alpha|]}\Big) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\mu_{\alpha}\times \frac{[\sigma:|\alpha|-1][\sigma+1:|\alpha|]}{([\sigma:|\alpha|])^{2}}\chi\Big\}\Big] + \sum_{\mu\in\pi_1} a_{\mu}(z)(([\sigma:|\alpha|]\xi^{\alpha}))^{\mu}\Big(\sum_{\alpha}\mu_{\alpha}\frac{[\sigma+1:|\alpha|]}{[\sigma:|\alpha|]}\Big)$,

$\underline{\mathfrak{r}_{\pi}(z,\sigma,\lambda,\xi,\zeta,\chi)} \equiv \Big(\prod_{i=0}^{m}[\sigma:i]^{M_i}\Big)\Big[\sum_{\mu\in\pi} a_{\mu}(z)(([\sigma:|\alpha|]\xi^{\alpha}))^{\mu}\Big\{\sum_{\alpha}\mu_{\alpha}\times \frac{[\sigma+\lambda:|\alpha|-1]}{[\sigma:|\alpha|]}\Big(\sum_{|\gamma|=2}\binom{\alpha}{\gamma}(\xi)^{-\gamma}\zeta_{\gamma}\Big) + \Big(\sum_{\alpha}\mu_{\alpha}\frac{[\sigma:|\alpha|-1]}{[\sigma:|\alpha|]}\chi\Big)\Big(\sum_{\alpha}\mu_{\alpha}\frac{[\sigma+\lambda:|\alpha|]}{[\sigma:|\alpha|]}\Big) - \sum_{\alpha}\mu_{\alpha}\frac{[\sigma:|\alpha|-1][\sigma+\lambda:|\alpha|]}{([\sigma:|\alpha|])^{2}}\chi\Big\}\Big] + \sum_{\mu\in\pi_1} a_{\mu}(z)(([\sigma:|\alpha|]\xi^{\alpha}))^{\mu}\Big(\sum_{\alpha}\mu_{\alpha}\frac{[\sigma+\lambda:|\alpha|]}{[\sigma:|\alpha|]}\Big)$,

ここに $z\in\Omega$, $\sigma,\lambda,\chi\in\mathbb{C}$, $\xi\in\mathbb{C}^{n}$, $\zeta=(\zeta_{\gamma};\ \gamma\in\mathbb{Z}^{n}_{+},\ |\gamma|=2)\in\mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ である。我々は $u_{\mathbb{k},l}$ を決定するために次の1階偏微分方程式を導入する。

(5-3) $\quad t_{\pi}(z,\sigma,0,\partial\phi(z),\partial_z)u_{0,0} + \mathfrak{r}^{0}_{\pi}\cdot u_{0,0} = 0$

$$t_{\pi}(z,\sigma,1,\partial\phi(z),\partial_z)u_{H_0,1} + \mathfrak{r}^{1}_{\pi}\cdot u_{H_0,1} + (u_{0,0})^{-|\pi|+1}\tilde{R}_{2H_0,2} = 0$$

$$t_{\pi}(z,\sigma,\tilde{d}\cdot\mathbb{k},\partial\phi(z),\partial_z)u_{\mathbb{k},l} + \mathfrak{r}_{\pi}\cdot u_{\mathbb{k},l} + (u_{0,0})^{-|\pi|+1}\tilde{R}_{\mathbb{k}+H_0,l+1} = 0$$

lemma 4-6 (2)により，我々はこの方程式を $(\mathbb{k},l)$ に関し帰納的に $u_{\mathbb{k},l}$ を求めるための transport equation と見看すことができる。方程式(5-3)を初期値問題として解くために，我々は Ass. 3-2 をみたす $\eta\in\mathbb{C}^{n}\setminus\{0\}$ に対し，$\psi(z)\in\mathcal{O}_0(\Omega)$ s.t. $\partial\psi(0)=\eta$ を任意に選ぶ。Ass. 3-2 のお陰で，このとき曲面 $T=\{\psi(z)=0\}$ は，$0\in{}^{\exists}\Omega' \underset{open}{\subset} \Omega$ に於て全ての $\mathbb{k}\in\mathbb{Z}^{M}_{+}$ に対し作用素 $t_{\pi}(z,\sigma,\tilde{d}\cdot\mathbb{k},\partial\phi(z),\partial_z)$ に対して非特性的である。まず，$v_{0,0}\in\mathcal{O}_1(T\cap\Omega)$ を任意に選び，(5-3)第1式を初期条件

(5-4) $\quad u_{\mathbb{0},0}|_T = v_{\mathbb{0},0}$

の下で解き，第2式以下に代入する。次に，$v_{\mathbb{k},\ell} \in \mathcal{O}(T \cap \Omega)$ for $(\mathbb{k},\ell) > (\mathbb{0},0)$，を任意に与え，第2式以下を初期条件

(5-5) $\quad u_{\mathbb{k},\ell}|_T = v_{\mathbb{k},\ell}$

の下に$(\mathbb{k},\ell)$に関し帰納的に解けば全ての$(\mathbb{k},\ell) \in \mathbb{D}$に対し，$u_{\mathbb{0},0} \in \mathcal{O}_1(\Omega'')$，$u_{\mathbb{k},\ell} \in \mathcal{O}(\Omega'')$ for $0 \in {}^\exists\Omega'' \underset{domain}{\subset} \Omega$，を決定することができる。こうして得られた$u_{\mathbb{k},\ell}$は，式(5-2)及び lemma 5-1 (1), (2)より，全ての$(\mathbb{k},\ell) \in \mathbb{D}$に対し $w_{\mathbb{k},\ell} = 0$ をみたす。

3. case III 我々は Ass 3-3 をみたす$\phi(z)$，$u_0(z)$を一組任意に選んで固定する。まず，

(5-6) $\quad u_{\mathbb{0},0} = u_0$

と置く。(4-15)より $w_{\mathbb{0},0} = P_{\sigma_r}(z, \partial\phi(z), u_{0,0})$ であるから，$w_{\mathbb{0},0} = 0$ は自動的に満たされる。次に$(\mathbb{k},\ell) > (\mathbb{0},0)$に対し

Ass. 3-3 より

(5-7) $$u_{\mathbb{k},\ell} = -\frac{R_{\mathbb{k},\ell}}{\Delta_{\sigma_r}(z, \alpha\cdot\mathbb{k}, \partial\phi(z), u_0(z))}$$

と置けば，Ass. 3-3 と lemma 4-6 (1)により case I と同様にして，全ての$(\mathbb{k},\ell) \in \mathbb{D}$に対し $u_{\mathbb{k},\ell} \in \mathcal{O}(\Omega')$ for $0 \in {}^\exists\Omega' \underset{domain}{\subset} \Omega$ を決定することができ，これらの$u_{\mathbb{k},\ell}$は $w_{\mathbb{k},\ell} = 0$ を全ての$(\mathbb{k},\ell) \in \mathbb{D}$に対して満たしている。

Rem. 3 $\quad \sigma(z) \equiv$ const. ならば，我々は log-term を含まない解を構成することもできる。さらに，σが有理数に等しいならば，その解は代数分岐型になる。

On Propagation of Singularities for nonlinear partial differential Equations

Tan ISHII

Department of Economics Meiji Gakuin Univerty

Abustract. We study solutions with regular singularities for nonlinear partial differential equations of polinomial type with complex analytic coefficients. We have a relation between four elements -- the surface on which singularities lie, the degree of the solution and the principal part of the operator -- which control the propagation of singularities of the solution. Conversely , we can construct a solution for given four elements satisfying the above relation and some additional conditions.